UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICAS

Existencia y unicidad de solución y comportamiento asintótico para la ecuación de onda con condición de frontera del tipo Neumann y disipación localmente distribuido

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Johnny Ronald TARMEÑO BERROCAL

ASESOR

Alfonso PÉREZ SALVATIERRA

Lima - Perú

2012

ESTUDIO DE LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO PARA LA ECUACIÓN DE ONDA CON CONDICIÓN DE FRONTERA DEL TIPO NEUMANN Y DISIPACIÓN LOCALMENTE DISTRIBUIDO

Johnny Ronald Tarmeño Berrocal

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de san Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas.

Aprobada por:

....
Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro Asesor

....
Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Presidente

....
Lic. Juan Raymundo Fernández
Miembro

Lima – Perú

Marzo – 2012

FICHA CATALOGRAFICA

TARMEÑO BERROCAL, JOHNNY RONALD

Existencia y unicidad de solución y comportamiento asintótico para la ecuación de Onda con condición de frontera del tipo Neumann y disipación localmente distribuido (Lima) 2012.

xii 57 p., 29,7 cm. (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2012)

Tesis, Universidad Nacional de San Marcos,

Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática

I. UNMSM/FdeCM II. Titulo (Serie)

DEDICATORIA

Agradezco a mis padres Hilda y Walter, por su amor y confianza, comprendiendo mis ideales y el tiempo que no estuve con ellos.
A mis hermanos, en especial a Maribel y Michael que ya están junto con Dios Padre.

AGRADEMIENTOS

Al profesor Dr. Alfonso Pérez Salvatierra, por asesorarme en la elección, elaboración y desarrollo del tema de mi tesis, pues gracias a su apoyo y la mucha paciencia hacia mi persona, pude culminar este estudio, y me motiva a seguir trabajando en esta especialidad.

Al profesor Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, quien con sus observaciones y sugerencias, me ayudaron a realizar las mejoras y precisiones a mi estudio. Debo añadir que fue también profesor en los cursos de especialidad de la carrera y primer motivador a seguir por esta área de la matemática.

A la profesora Dr. María Zegarra, quien me dicto el curso de Análisis Funcional, sus apuntes y alcances resolvieron mis dudas respecto a este curso, a la vez nos brindaba su buen ánimo y predisposición, sin su apoyo no estaría culminando este proyecto personal.

Al Lic. Julio Román Loayza Cerrón, amigo y compañero sanmarquino, quien me ayudó desde el principio de la elaboración de la tesis, sus apuntes, sus alcances de textos, la revisión y observaciones, ayudaron a la mejora de mi trabajo.

Al Lic. Nico Cupi, amigo y compañero sanmarquino, por su apoyo moral y académico, en la revisión y el alcances de apuntes que facilitaron el desarrollo de mi trabajo.

Al Lic. Julio Pon, amigo compañero sanmarquino, quien me brindo su tiempo para revisar mis avances y darle también algunas sugerencias a mi trabajo, así también por sus apoyo moral que siempre lo tendré en cuenta.

A Jorge Astocondor, amigo y compañero sanmarquino, quien me apoyo en la digitación, revisión y ortografía de mi trabajo, así también su apoyo moral, que siempre tendré en cuenta.

Finalmente al Prof. Santiago Cesar Rojas, por sus sugerencias y revisión de la traducción del trabajo, hecho que agradeceré siempre.

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION Y COMPORTAMIENTO ASINTOTICO PARA LA ECUACION DE ONDA CON CONDICION DE FRONTERA DEL TIPO NEUMANN Y DISIPACION LOCALMENTE DISTRIBUIDO.

JOHNNY RONALD TARMEÑO BERROCAL

Marzo – 2012

Orientador: Dr. Alfonso Pérez Salvatierra.

Titulo Obtenido: Licenciado en Matemática.

RESUMEN

En este trabajo estudiamos la existencia y unicidad de solución de la ecuación de la onda con condiciones de frontera del tipo Neumann, con disipación localmente distribuida, representada por el sistema siguiente

$$\left|\begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + u + f(u) + a(x)u_t = 0 & \text{en} \quad \Omega \mathrm{x} (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \mathrm{x} (0,\infty) \\ u(0) = u_0 \in H^1, \quad u_t(0) = u_1 \in L^2 & \text{en} \quad \Omega \end{array}\right.$$

Usando el método de Faedo Galerkin. Además analizamos el decaimiento no exponencial de la energía asociado al sistema planteado.

Planteamos los objetivos, se hacen las estimativas correspondientes basándonos en propiedades del espacio donde se encuentra la solución de la ecuación, así como los teoremas correspondientes al sistema estudiado. Finalmente damos los resultados y conclusiones.

PALABRAS CLAVES:

Ecuación de Onda

Método de Faedo Galerkin

Principio de Continuación única.

ABSTRACT

In this work we study the existence and uniqueness of solution of the wave equation with boundary Neumann conditions with dissipation locally distributed, which is represented by the following system

$$(*)\quad \left|\begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + u + f(u) + a(x)u_t = 0 & \text{en} \quad \Omega x (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma x (0,\infty) \\ u(0) = u_0 \in H^1 , \quad u_t(0) = u_1 \in L^2 & \text{en} \quad \Omega \end{array}\right.$$

For this we use the Faedo Galerkin method. In addition we analyze the no exponential decay of the energy associated to the system.

We propose the objectives, the corresponding estimates are made based on the properties of the space where we find the solution to as well as on the theorems corresponding to the studied system. Finally, we give the results and conclusions.

KEY WORDS:

Wave equation.

Faedo Galerkin method.

Unique continuation principle.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo es estudiar la existencia y unicidad de la solución así como el comportamiento asintótico para la ecuación de la onda con condición de frontera del tipo Neumann localmente distribuido.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Se tiene $u_0 \in H^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$.

El problema

$$(*)\left|\begin{array}{lll} u_{tt} - \Delta u + u + f(u) + a(x)u_t = 0 & \text{en} & \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} & \Sigma = \Gamma \times (0,\infty) \\ u(0) = u_0 \in H^1 \ , \quad u_t(0) = u_1 \in L^2 & \text{en} & \Omega \end{array}\right.$$

donde $a(x) \geq a_o > 0$ c. s. en ω, $\omega \subseteq \Omega$ vecindad de $\Gamma = \partial\Omega$.

Esta ecuación describe las oscilaciones de una cuerda elástica sujeta a una fuente disipatíva interna local. El estudio de los problemas localmente distribuidos consiste en que el efecto físico que se da en tan solo una vecindad de la frontera del cuerpo es suficiente para tener información de lo que ocurre en todo el cuerpo.

Estudiaremos la existencia y unicidad de la solución débil del sistema planteado, mediante el método de Faedo – Galerkin, este método consiste en llevar el problema a un espacio finito dimensional, resolver el problema de existencia y unicidad en el espacio proyectado y luego, mediante estimativas pasar la solución a un espacio adecuado.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

En este capítulo, se hace referencia al marco teórico a utilizar en el desarrollo del teorema de existencia y unicidad.

1.1 Notaciones de Derivadas Parciales.

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se definen:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n .$$

$$\alpha! = \alpha_1! . \alpha_2! . \alpha_3! \dots \alpha_n! .$$

Se representa por $D^\alpha(\Omega)$, al operador derivación de orden $|\alpha|$, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} . \partial x_2^{\alpha_2} . \partial x_3^{\alpha_3} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} .$$

Para $\alpha = (0, 0, 0, \dots, 0)$, se define $D^0 u = u$.

Se representa por $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ a la derivada parcial.

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, con $\beta \leq \alpha$, si, y solo si $\beta_i \leq \alpha_i \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$. Entonces

$$D^\alpha(u\,v) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha - \beta)!} D^\beta u \; D^{\alpha-\beta} v .$$

1.2 Soporte de una Función

1.2.1 Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función, se define el soporte de u, como la cerradura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega \;/\; u(x) \neq 0\}$ y se representa por

$$\operatorname{sop}(u) = \overline{\{x \in \Omega \;/\; u(x) \neq 0\}}^{\,\Omega} .$$

1.2.1.1 Ejemplo.

Consideremos la función:

$$\theta(x)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) & , \text{ si } |x|<1 \\ 0 & , \text{ si } |x|\geq 1\end{cases},$$

donde $\operatorname{sop}(\theta)=[-1,1]$.

1.2.1.2 Ejemplo.

En forma más general:

$$\theta(x)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{1}{\left(\|x\|^2-1\right)}\right), & \text{si } \|x\|<1 \\ 0 & , \text{ si } \|x\|\geq 1\end{cases},$$

donde $\operatorname{sop}(\theta)=\left\{x\in\mathbb{R}^n;\ \|x\|\leq 1\right\} = \overline{B_1(0)}$.

1.3 Espacio de las Funciones de Prueba.

1.3.1 Definición

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $u:\Omega\to\mathbb{R}$ una función, se dice que u es una función de prueba en Ω, si u admite derivadas parciales continuas de cualquier orden en Ω y se anula fuera de un compacto de Ω, denotaremos a este espacio con $C_o^\infty(\Omega)$. Luego $u\in C_o^\infty(\Omega)$ si y solo si u es infinitamente diferenciable y existe un compacto $K\subset\Omega$, tal que $u=0,\ \forall x\in\Omega-K$.

1.3.2 Definición

Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $D(\Omega)$ y $\varphi\in D(\Omega)$, se dice que φ_n converge a φ en $D(\Omega)$, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe $K\subset\Omega$ compacto tal que $\operatorname{sop}(\varphi_n-\varphi)\subset K,\ \forall n=1,2,3,\ldots$.
2. Para cada $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $D^\alpha\varphi_n$ converge uniformemente a $D^\alpha\varphi$ en $K\subset\Omega$.

Con esta topología del límite dado en $D(\Omega)$, se denota el espacio vectorial de las funciones de prueba por $D(\Omega)=\left(C_o^{\infty}(\Omega), \to \right)$.

1.4 Espacio de las Distribuciones

1.4.1 Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto. Toda funcional lineal $T: D(\Omega) \to \mathbb{R}$, se dice que es continua sobre $D(\Omega)$ si, y solo si $\forall (\varphi_n) \subset D(\Omega)$ y $\varphi \in D(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ en $D(\Omega)$, entonces $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$ (convergencia puntual).

Diremos que la aplicación $T: D(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una distribución si, T es lineal y continua.

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \quad , \quad \varphi \in D(\Omega)$$

Se denotará por

$$D'(\Omega) = \left\{ T: D(\Omega) \to \mathbb{R} \ / \ T \text{ es lineal y continua} \right\}.$$

$\langle T, \varphi \rangle$, representa la dualidad entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$.

Con las operaciones usuales, $D'(\Omega)$ es un espacio vectorial.

1.4.2 Definición

Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $D'(\Omega)$ y $T \in D'(\Omega)$, se dice que $T_n \to T$ en $D'(\Omega)$, si y solo si $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$, para cada $\varphi \in D(\Omega)$.

1.4.3 Definición (Derivación en el sentido distribucional)

Sea T una distribución sobre $D(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La derivada de orden α de T, se define como

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

donde $D^{\alpha}T$ es una distribución sobre $D(\Omega)$ y $T \in D'(\Omega)$.

En efecto, sea $(\varphi_\nu)\subset D(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \to 0$ en $D(\Omega)$, entonces existe K compacto de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\operatorname{sop}(\varphi_\nu)\subset K \text{ y } D^\alpha\varphi_\nu \to 0 \text{ uniformemente en } K,\ \forall \alpha\in\mathbb{N}^n .$$

Se sigue de ahí que $D^\beta\varphi_\nu \to 0$ en $D(\Omega)$, pues $\operatorname{sop}(D^\beta\varphi_\nu)\subset \operatorname{sop}(\varphi_\nu)\subset K$ y $D^\beta\varphi_\nu \to 0$ uniformemente en K.

Además, si $T\in D(\Omega)$ se tiene que $\langle T, D^\beta\varphi_\nu\rangle \to 0$ en K, y en consecuencia

$$\left|\langle D^\alpha T, \varphi_\nu \rangle\right| = \left|\langle T, D^\alpha\varphi_\nu \rangle\right| \to 0 .$$

Lo que prueba lo sustentado.

Así, las funciones localmente sumables poseen derivadas de todas las órdenes en el sentido de las distribuciones.

1.5 Espacios de Bochner

Sea X un espacio de Banach. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} u:[0,T] &\to X \\ t &\mapsto u(t) \end{aligned}$$

Extendemos la noción de medibilidad, integralidad y diferencialidad débil.

1.5.1 Definición

(i) Una función $S:[0,T]\to X$ es llamada simple, si se tiene la forma

$$S(t)=\sum_{u=1}^{m} I_{E_i}(t)u_i$$

de conjuntos medibles Lebesgue tal que $E_i\subset[0,T]$ y $u_i\in X$.

(ii) Una función $f:[0,T]\to X$ es llamada fuertemente medible, si existen funciones simples $S_k:[0,T]\to X$, tal que

$$S_k(t)\to f(t), \text{ casi siempre en } [0,T].$$

1.5.2 Definición (Bochner integrable)

(i) Para una función simple $S(t)=\sum_{u=1}^{m} I_{E_i}(t)u_i$ definimos la integral

$$\int_0^T S(t)\,dt := \sum_{u=1}^{m} u_i\mu(E_i)$$

(ii) Diremos que $f:[0,T]\to X$ es Bochner-integrable o integrable en el sentido de Bochner si existe una sucesión (S_k) de funciones simples tal que $S_k(t)\to f(t)$ c. s. y $\int_0^T \|S_k(t)-f(t)\|_X\,dt \to 0$ cuando $k\to\infty$.

(iii) Si f es Bochner integrable, definimos $\int_0^T f(t)\,dt := \lim_{k\to\infty}\int_0^T S_k(t)\,dt$.

1.5.1 Teorema (Caracterización de las funciones Bochner - integrable)

Una función fuertemente medible $f:[0,T]\to X$ es Bochner integrable si, y solo si, la función numérica

$$\begin{aligned}[0,T]&\to \mathbb{R}\\ t\ &\mapsto \|f(t)\|_X\end{aligned}$$

Es Lebesgue integrable, es decir,

$$\int_0^T \|f(t)\|_X\,dt < +\infty$$

En este caso, se tiene

$$\left\|\int_0^T f(t)\,dt\right\|_X \le \int_0^T \|f(t)\|_X\,dt$$

Además para todo $u'\in X'$ la función $t \to \langle u',f(x)\rangle_{X',X}$ es integrable con

$$\left\langle u', \int_0^T f(t)\,dt \right\rangle_{X',X} = \int_0^T \langle u', f(x)\rangle_{X',X}\,dt$$

Nota: Del teorema precedente, diremos que

$u:[0,T]\to X$ es integrable en el sentido de Bochner en $[0,T]$, si u es medible y la función numérica $t \mapsto \|u(t)\|_X$ es integrable según Lebesgue en $[0,T]$.

En este caso, la integral de Bochner de u es el vector de X, denotado por

$$\int_0^T u(t)\,dt \in X'$$

Y caracterizado por $\left\langle f, \int_0^T u(t)\,dt \right\rangle_{X',X} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{X',X}\,dt, \quad \forall f \in X'$

1.6 Los Espacios Vectoriales $L^P(0,T;X)$

Esto motiva las siguientes definiciones de espacios de Banach a valores en espacios de Lebesgue.

1.6.1 Definiciones

(i) Sea X un espacio de Banach separable, $1 \le p < \infty$. . Definimos los espacios

$$L^p(0,T;X) := \left\{ u:[0,T]\to X \text{ fuertemente medible tal que } \int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt < \infty \right\},$$

donde u es integrable en el sentido de Bochner (o Bochner - integrable).

Se define en $L^p(0,T;X)$ la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt \right)^{1/p}.$$

$$\left(L^p(0,T;X)\ ;\ \|\cdot\|_{L^p(0,T;X)} \right)$$ es un espacio de Banach.

Cuando p = 2 y X es un espacio de Hilbert, entonces $L^p(0,T;X)$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T (\, u(t),\ v(t)\,)_X\, dt\,.$$

Observamos que $t \to (\, u(t),\ v(t)\,)_X$ es integrable en $[0,T],\ \forall u,v \in L^2(0,T;X)$

En efecto, de la desigualdad de Cauchy-Schwart, se tiene

$$\left|(\, u(t),\ v(t)\,)_X\right| \leq \|u(t)\|_X \|v(t)\|_X \ \text{ en } \ L^1(0,T).$$

y por la desigualdad de Young

$$\left|(\, u(t),\ v(t)\,)_X\right| \leq \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_X + \frac{1}{2}\|v(t)\|^2_X$$

de donde concluimos la observación.

(ii) En el espacio

$$L^\infty(0,T;X) := \left\{ u:[0,T] \to X \ \text{ fuertemente medible} / \ \sup_{t\in[0,T]}\mathrm{ess}\|u(t)\|_X < \infty \right\}.$$

Definimos la norma en $L^\infty(0,T;\ X)$ por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in[0,T]}\mathrm{ess}\|u(t)\|_X\ .$$

Así, resulta que

$$\left(L^\infty(0,T;X);\ \|\cdot\|_{L^\infty(0,T;X)} \right)$$

es un espacio de Banach.

1.6.2 Resultados adicionales

(i) Si $1 < p < \infty$, entonces el dual topológico de $L^p(0,T;X)$ se identifica con el espacio $L^{p'}(0,T;X')$, esto es

$$\left(L^p(0,T;X)\right)' \cong L^{p'}(0,T;X')$$

(ii) Se demuestra también que si X fuera reflexivo (respectivamente separable), entonces $L^p(0,T;X)$ es reflexivo (respectivamente separable).

Con esta identificación tenemos que $f \in L^{p'}(0,T;X')$, $u \in L^p(0,T;X)$

$$\langle f, u \rangle_{L^{p'}(0,T;X') \times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle_{X',X} dt$$

(iii) Dado $u \in L^p(0,T;X)$ definimos

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)\, dt, \quad \forall \varphi \in D(0,T),$$

donde la integral es entendida en el sentido de Bochner, resulta de la definición precedente que

$$\left| \langle T_u, \varphi_\nu \rangle \right| \le \int_0^T \| u(t) \|_X \left| \varphi_\nu(t) \right| dt \le \sup_{t\in[0,T]} \left| \varphi_\nu(t) \right| \int_0^T \| u(t) \|_X \, dt$$

(iv) Deducimos de la desigualdad anterior que si $\varphi_\nu \to 0$ en $D(\Omega)$ entonces $\langle T_u, \varphi_\nu \rangle \to 0$ en $\mathbb{R}$, de modo que $T_u \in \mathcal{L}\big(D(0,T); X\big) = D'(0,T; X)$.

El espacio $D'(0,T; X)$ es denominado espacio de las distribuciones vectoriales con valores en X, definidas sobre $[0,T]$.

(v) Como en el caso de las distribuciones escalares, la distribución vectorial T_u es unívocamente determinada por $u \in L^p(0,T;X)$.

En efecto, si

$$\langle T_u, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in D(0,T),$$

entonces

$$0 = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)\, dt .$$

Y por tanto, para todo $f \in X'$, se tiene

$$0 = \left\langle f\,,\ \int_0^T u(t)\,\varphi(t)\,dt \right\rangle = \int_0^T \langle f,\ u(t)\,\varphi(t)\rangle_{X',X} dt$$

$$= \int_0^T \langle f,\ u(t)\rangle\,\varphi(t)\,dt\ ,\ \ \forall\,\varphi \in D(0,T),\ \ \forall f \in X'$$

Del lema de Du Bois Raymond concluimos que

$$\langle f\,,\ u(t)\,\rangle = 0,\ \ \forall f \in X' \text{ c. s. en } [0,T].$$

Y por el teorema de Hahn - Banach, resulta que $u(t) = 0$, c. s. en $[0,T]$ y por tanto $T_u = 0$. Por consiguiente, podemos identificar u con T_u en este sentido,

$$L^p(0,T;X) \subset D'(0,T;X).$$

(vi) Identidad de Parseval.

Sea X un espacio vectorial y B una base ortonormal de X. Si X es un espacio Hilbert separable entonces

$$\|x\|^2 = \langle x,x\rangle = \sum_{v \in B} |\langle x,v\rangle|^2$$

Esta identidad se puede demostrar con el teorema de Riesz-Fischer. Ver Pedro H. Rivera [3]

1.7 Espacios de Sobolev

1.7.1 Definición

Sea $m \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Se representa por $W^{m,p}(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones de $L^p(\Omega)$ tales que para todo $|\alpha| \le m$, $D^\alpha u$ pertenece a $L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada en sentido distribucional.

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,/\, D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \le m \right\}.$$

Con norma

$$\| u \|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\,.$$

1.7.2 Observaciones:

(i) $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

(ii) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

1.7.3 Definición

Sea $m \in \mathbb{N}$. Se denota con $H^m(\Omega)$ al espacio vectorial de todas las funciones $u \in L^2(\Omega)$ tales que para todo $|\alpha| \le m$, $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada en el sentido de las distribuciones.

1.7.4 Proposición

El conjunto $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \left(D^\alpha u, D^\alpha v \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

y la norma asociada a este producto está dado por

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \left| D^\alpha u \right|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}, \quad \forall u \in H^m(\Omega).$$

Demostración, ver [Moreira Cavalcanti].

Cuando $m = 0$, se tiene $H^o(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Cuando $m = 1$, se tiene $H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ / \ \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \forall i = 1, 2, ..., n \right\}$,

con el producto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

y la norma asociada

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \left(| u |^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

1.8 Espacios Duales de Espacios de Sobolev

1.8.1 Definición

Se denota con $H_0^m(\Omega)$ la clausura del espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ en la topología de $H^m(\Omega)$. Se denota con $H^{-m}(\Omega)$ el dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

1.8.2 Proposición

$H^{-m}(\Omega)$ es el espacio de las distribuciones de la forma

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in L^2(\Omega).$$

Demostración, ver Medeiros [7].

1.9 Algunas propiedades de las Inmersiones

1.9.1 Proposición

Se tienen las siguientes inmersiones continuas:

$$H_o^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega).$$

Demostración, ver Adams [1].

1.9.2 Proposición

Sea Ω un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$ y $0 \leq m \leq k \leq \ell$ entonces se tienen las siguientes inmersiones continuas

$$C^\ell(\overline{\Omega}) \hookrightarrow H^k(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega).$$

Demostración, ver Adams [1].

1.9.3 Teorema (Rellich)

Sea Ω un abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces la inmersión $H^{1+m}(\Omega)$ en $H^m(\Omega)$ es compacta.

1.9.4 Corolario.

Si Ω es abierto limitado y bien regular de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$C^\ell(\overline{\Omega}) \overset{c}{\hookrightarrow} H^k(\Omega), \text{ con } 0 \leq k \leq \ell$$

donde $\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica inmersión compacta y densa.

Demostración, ver Medeiros - Milla [7].

1.9.5 Teorema (Compacidad de Lions - Aubin)

Sean B_o, B y B_1 espacios de Banach con B_o y B_1 reflexivos.

Sean $1 < p_0 \, , \, p_1 < +\infty$ y

$$B_o \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$$

Sea $1 < T < \infty$ y consideramos el espacio normado

$$W(0\,,T) = \left\{ v\,;\, v \in L^{Po}(0,T;Bo) \,,\, v' \in L^{P_1}(0,T:B_1) \right\}.$$

Con la norma

$$\|v\|_{W(0,T)} = \|v\|_{L^{Po}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{P_1}(0,T;B_1)}.$$

Entonces

(i) $W(0,T)$ es un espacio de Banach reflexivo.

(ii) $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{Po}(0,T;B)$.

Demostración: Ver Lions [9].

1.10 Convergencias en un Espacio de Banach.

1.10.1 Definición (Convergencia Fuerte)

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en el espacio de Banach X y $u \in X$.

Entonces $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ fuerte en X $\Leftrightarrow$ $\|u_n - u\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

1.10.2 Definición (Convergencia Débil)

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en el espacio de Banach X y $u \in X$.

Entonces $u_n \rightharpoonup u$ débil en X $\Leftrightarrow$ $\forall f \in X'$ se tiene

$$\langle f, u_n \rangle_{X',X} \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f, u \rangle_{X',X} \text{ en } \mathbb{R}.$$

1.10.3 Definición (Convergencia Débil Estrella)

Sea X un espacio de Banach. Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones en X´ y $u \in X'$, entonces $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ converge débil estrella en X´ si $\forall w \in X$ se tiene

$$\langle u_n, w \rangle_{X',X} \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle u, w \rangle_{X',X}.$$

1.11. Existencia de Soluciones en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.11.1 Definición

Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$ y f una función definida en I con valores en $\mathbb{R}^n$. Se dice que f es absolutamente continua en I, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, cualquiera que sea el sistema finito de sub-intervalos disjuntos dos a dos $]a_k ; b_k[$, $k = 1, 2, ..., m$ de I y tal que

$$\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) < \delta \text{ , implica } \sum_{k=1}^{m} \| f(b_k) - f(a_k) \| < \varepsilon .$$

1.11.2 Observación.-

Toda función absolutamente continua es uniformemente continua. Como toda función uniformemente continua es continua, entonces toda función absolutamente continua es continua.

1.11.3 Teorema

Sea f una función de $[a; b] \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si f es función integrable sobre $[a; b]$ y

$$F(t) = \int_a^t f(s)\,ds\,, \ a \le t \le b .$$

Entonces F es una función absolutamente continua en $[a ; b]$, y además tenemos $F'(t) = f(t)$ c. t. p. en $[a; b]$.

Demostración, ver Kolmogorov – Fomin [8].

1.11.4 Definición (Problema de Valor Inicial)

Sea $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ cuyos elementos son denotados con (t, x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$f : D \to \mathbb{R}^n$, una función no necesariamente continua y $(t_o, x_o) \in D$.

Consideremos el problema de valor inicial

$$(*) \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_o) = x_o \end{cases}.$$

1.11.5 Definición

Decimos que una función φ es solución del problema (*) sobre el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, si existe el intervalo I y φ es absolutamente continua en I, tal que $t_o \in I$, $\varphi(t_o) = x_o$ y $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ c.t.p. en I.

1.11.6 Definición

Sea $D \subset R^{n+1}$; y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función. Se dice que f satisface las condiciones de Carathéodory sobre D si

(1) $f(t, x)$ es medible en t para cada x fijo.

(2) $f(t, x)$ es continua en x para cada t fijo.

(3) Para cada compacto K en D, existe una función real integrable $m_K(t)$, tal que

$$\| f(t, x) \| \leq m_K(t) \quad \forall (t, x) \in K.$$

1.11.7 Teorema (CARATHÉODORY)

Sean $a > 0$, $b > 0$, y $f : D \to \mathbb{R}^n$ donde

$$D = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t - t_o| \leq a \quad y \quad \| x - x_o \| \leq b \right\}$$

satisface las condiciones de Carathéodory sobre D.

entonces existe una solución φ del problema (*) sobre algún intervalo $|t - t_o| \leq \beta$, $\beta > 0$.

Demostración, ver Coddington – Levinson [4].

1.12 Resultados Importantes Adicionales

1.12.1 Definición

Consideremos el operador $a(\cdot,\cdot): H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$. Definido por

$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx=\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \qquad \forall u,v\in H^1(\Omega).$$

La forma $a(u,v)$ tiene las siguientes propiedades:

(i) $a(\cdot,\cdot)$ es continua. En efecto,

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\le \sum_{i=1}^n\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|.\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|dx \le \sum_{i=1}^n\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2}\\ &\le \left(\sum_{i=1}^n\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2}\\ &\le C\|u\|\,\|v\|\end{aligned}$$

(ii) $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica, i.e. $a(u,v)=a(v,u)$, $\forall u,v\in H^1(\Omega)$. Es inmediato por propiedad del producto interno en $\mathbb{R}^n$.

(iii) $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva, i.e. existe C > 0 tal que

$$a(u,u)\ge C\|u\|^2 \quad , \quad \forall u,v\in H^1(\Omega)$$

En efecto, de la Desigualdad de Poincaré, tenemos

$$|\,u\,|^2\le C_\Omega|\nabla u\,|^2 \quad , \quad \forall u\in H^1(\Omega),$$

luego se sigue que

$$\|\,u\,\|^2=|\,u\,|^2+|\nabla u\,|^2\le(1+C_\Omega)|\nabla u\,|^2=(1+C_\Omega)|a(u,u)|.$$

Esto es,

$$a(u,u)\ge K\|u\|^2 \quad , \quad K:=\frac{1}{1+C_\Omega}.$$

Esto es, $a(u,u)$ es el producto interno en $H^1(\Omega)$ y que denotaremos por

$$a(u,v)=(u,v)_{H^1(\Omega)}=((u,v)), \quad \forall u,v\in H^1(\Omega).$$

y con norma

$$|u|_{H^1(\Omega)}=\|u\| \quad , \quad \forall u\in H^1(\Omega)$$

1.12.2 Teorema (Alaoglu – Bourbaky)

Sea X un espacio de Banach, entonces la bola unitaria es débil estrella compacta, es decir,

$$\|u_v\|_X\le C \;\Rightarrow\; \exists\left(u_{V_k}\right)\subset(u_v), \; u\in X \text{ tal que } u_{V_k}\xrightarrow{*}u \text{ débil estrella.}$$

Demostración, ver Kolmogorov – Fomin [8].

1.12.3 Lema

Sean X e Y dos espacios de Hilbert tales que $X\subset Y$, con inmersión continua de X en Y, esto es $X \hookrightarrow Y$. Si $u\in L^p(0,T;X)$ y $u'\in L^p(0,T;Y)$, con $1\le p\le\infty$, entonces $u\in C^o([0,T];Y)$.

Demostración, ver Teman [10].

1.12.4 Lema (Lema de Gronwall – Caso simple)

Sea $\varphi\in C^o(0,T;\mathbb{R})$, $\varphi(t)\ge 0$, $\forall t\in[0,T]$ y

$$\varphi(t)\le k+\int_0^t\varphi(s)ds\,,\; k>0 \quad \text{constante}.$$

Entonces

$$\varphi(t)\le ke^t\,, \qquad \forall t\in[0,T]$$

En particular $\varphi\equiv 0$ si $k=0$.

Demostración:

De la hipótesis se tiene

$$\frac{\varphi(t)}{k+\int_0^t\varphi(s)ds}\le 1\ .$$

Integrando de 0 a T, se tiene

$$\log\left[k + \int_0^t \varphi(s)ds\right]_0^t \leq t$$

$$\log\left[\frac{k + \int_0^t \varphi(s)ds}{k}\right] \leq t$$

entonces

$$k + \int_0^t \varphi(s)ds \leq ke^t$$

$$\therefore \quad \varphi(s) \leq ke^t \quad , \quad \forall t \in [0,T]$$

1.12.5 Lema (Desigualdad de Gronwall)

Sea $m \in L^1(0,T,\mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ c.s. en $]0,T[$ y $a \geq 0$ real. Supongamos que $g \in L^\infty(0,T)$, $g \geq 0$ en $\langle 0,T\rangle$ y satisface

$$\frac{1}{2}g(t)^2 \leq 2a^2 + 2\int_0^t m(s)g(s)\,ds, \quad \forall t \in \langle 0,T\rangle,$$

entonces

$$g(t) \leq 2\left(a + \int_0^t m(s)\,ds\right) \quad \text{en } [0,T].$$

Demostración, ver Teman [10].

1.11.6 Teorema (Teorema de Green)

Sea Ω un conjunto abierto acotado bien regular de $\mathbb{R}^n$, denotamos la frontera de Ω, como $\partial\Omega = \Gamma$. Sean $u, v \in H^1(\Omega)$, entonces para cada i = 1,2,3,…,n; tenemos:

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v\,dx + \int_\Gamma u\,v\,d\Gamma$$

Demostración, ver Kesavan [17].

1.11.7 Corolario

Considerando Ω un conjunto abierto acotado bien regular de $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega = \Gamma$, s si $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, entonces tenemos:

$$\int_\Omega (-\Delta u)\, v\, dx = \int_\Omega \nabla u . \nabla v\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, d\Gamma .$$

Demostración, ver Kesavan [17].

1.11.8 Teorema de Green, fórmulas de Green

(i) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, limitado de clase C^1 ($\partial\Omega = \Gamma$).

Sean $u, v \in H^1(\Omega)$, entonces para $1 \le i \le n$,

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx + \int_\Gamma u\, v\, d\Gamma .$$

de donde por la continuidad del trazo γ_1.

Para $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, tenemos

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v\, dx = -\int_\Omega \Delta u\, v\, dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma .$$

o

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_o v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) x H^{1/2}(\Gamma)} .$$

(ii) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, limitado de clase C^2. Sean $u, v \in H^2(\Omega)$, entonces:

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_o v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma) x H^{3/2}(\Gamma)} - \langle \gamma_1 u, \gamma_o v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) x H^{1/2}(\Gamma)}$$

o

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx - \int_\Omega u\, \Delta v\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\Gamma - \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma .$$

Demostración, Moreira Cavalcanti [11].

CAPÍTULO II

2.1 Planteamiento del Problema

En esta sección planteamos las hipótesis y algunos resultados necesarios para el desarrollo del problema en estudio.

H1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado $(n \geq 1)$, $\Gamma = \partial\Omega$ frontera de clase C^2.

H2. Sea $a(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $a(x) \geq a_o > 0$ c. s. en ω, $\omega \subseteq \Omega$ una vecindad de $\Gamma = \partial\Omega$.

H3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(s).s \geq 0$ $\forall s \in \mathbb{R}$, f es superlineal; es decir, dado $\delta > 0$

$$f(s)s \geq (2+\delta)F(s); \ \forall s \in \mathbb{R},$$

donde $F(s) := \int_0^s f(\lambda)d\lambda$

H4. $f \in C^1(\mathbb{R})$ y f tiene la propiedad de crecimiento, esto es, existen constantes $C > 0$, $p > 1$, $(n-2)p \leq n$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C\left(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1}\right)|x-y|; \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

H5. Para un $x_o \in \mathbb{R}^n$ fijo se tiene que $\partial\Omega = \Gamma = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1$ donde

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma;\ m(x).\eta(x) > 0\}$$
$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma;\ m(x).\eta(x) < 0\}$$

Consideremos $m(x) = x - x_o$ y $\eta(x)$ es la normal unitaria en un punto x.

Con estas hipótesis estudiaremos el sistema

$$(2,1) \quad \left|\begin{array}{lr} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + u(x,t) + f(u(x,t)) + a(x)u_t(x,t) = 0 & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_o(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en } \Omega \end{array}\right. .$$

Donde $a(x) \geq a_o > 0$ c. s. en ω, $\omega \subseteq \Omega$ una vecindad de $\Gamma = \partial\Omega$.

El problema (2,1) está bien puesto en el espacio $H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, es decir, para datos iniciales $\{u_0,u_1\}\in H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, existe una única solución tal que

$$u\in C\left(\left[0,+\infty\right\rangle,H^1(\Omega)\right)\cap C^1\left(\left[0,+\infty\right\rangle,L^2(\Omega)\right).$$

2.2 Definición

De los datos sobre la frontera $\partial\Omega=\Gamma$ y del teorema de Green, podemos definir la solución débil para el sistema (2,1)

Diremos que $u:Q\to\mathbb{R}$ con $Q=\Omega\times(0,\infty)$, es solución débil de (2,1) si,

(i) $u\in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$

(ii) $u_t\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

(iii) $u_{tt}\in L^2\left(0,T;\left(H^1(\Omega)\right)'\right)$

(iv) $\frac{d}{dt}\left(u'(t),v\right)+a\left(u(t),v\right)+\left(u,v\right)+\left(f(u),v\right)+\left(a(x)u'(t),v\right)=0,\ \forall v\in H^1(\Omega)$

en el sentido $D'(0,T)$ esto es

$$u_{tt}-\Delta u+u+f(u)+a(x)u_t=0 \quad \text{en } D'\left(0,T;H^1(\Omega)\right).$$

(v) $u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x)$, en Ω y $\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$ sobre Σ en el sentido $D'(0,T)$.

2.3 Teorema (Existencia de la solución débil)

Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto limitado con frontera regular $\Gamma=\partial\Omega$, $u_0\in H^1(\Omega)$, $u_1\in L^2(\Omega)$, $f\in L^1\left(0,T;\ L^2(\Omega)\right)$ y $a(x)\geq a_0>0$. Entonces existe una única función $u:Q\to\mathbb{R}$ solución del sistema (2.1) tal que:

(i) $u\in L^\infty\left(0,T;\ H^1(\Omega)\right)$

(ii) $u_t\in L^\infty\left(0,T;\ L^2(\Omega)\right)$

(iii) $u_{tt}-\Delta u+u+f(u)+a(x)u_t=0$ en $D^1\left(0,T;\ H^1(\Omega)\right)$

(iv) $u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x)$, en Ω y $\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$ sobre Σ.

Para la siguiente prueba utilizaremos el Método de Faedo - Galerkin.

2.4 METODO DE FAEDO GALERKIN

Probaremos que el problema (2,1) tiene una solución débil.

En ese sentido planteamos el problema aproximado sobre un espacio finito dimensional sobre el cual hallaremos su solución débil para luego extender vía la densidad de espacios vectoriales.

Sea $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base hilbertiana de $H^1(\Omega)$ (puesto que es un espacio de hilbert) tal que las combinaciones lineales finitas de los elementos de la base sea densa en $H^1(\Omega)$.

Esta base hilbertiana se puede ortonormalizar en $L^2(\Omega)$ mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt con la norma dada en $L^2(\Omega)$.

Sea $V_m = [w_1, w_2, w_3, ..., w_m]$ el espacio finito dimensional de $H^1(\Omega)$ generado por los m primeros vectores de la base hilbertiana.

Sea $u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j(x)$, donde $g_{jm} \in C^2([0,T])$ y $w_j \in V_m$; $g_{jm}(t)$ son determinados de tal forma que satisfacen el problema aproximado que plantearemos a continuación.

Denotaremos con $(\ .\ ,\ .\ )$ y $|\ .\ |$ el producto interno y la norma respectivamente en $L^2(\Omega)$.

Sea $u_m(x,t)$ definida en el intervalo $[0, t_m[$ solución del siguiente problema aproximado.

$$\text{(P.A.)}\left|\begin{array}{l}\left(u''_m(t), w\right) + a\left(u_m(t), w\right) + \left(u_m(t), w\right) + \left(f\left(u_m(t)\right), w\right) + \left(a(x)u'_m(t), w\right) = 0;\ \forall w \in V_m \\ u_m(x,0) = u_{0m}(x) \quad , \quad u'_m(x,0) = u_{1m}(x)\end{array}\right.$$

(u_{0m}), (u_{1m}), son sucesiones en V_m, tal que

$u_{0m} \to u_0$ fuerte en $H^1(\Omega)$

$u_{1m} \to u_1$ fuerte en $L^2(\Omega)$

Veamos que el problema aproximado tiene solución en $\left[0, t_m\right[$, $0 < t_m < T$ y por el teorema de Caratheodory, se extenderá al intervalo $\left[0, T\right]$.

Teniendo $u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j(x)$ y sus derivadas

$$u'_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\, w_j ,$$

$$u''_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)\, w_j .$$

Reemplazamos en (P.A.) para cada $w = w_i \in V_m$ y teniendo en cuenta que

$$a\left(u_m(t), w\right) = \left(-\Delta u_m(t), w\right)$$

Tenemos

$$\left(\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t) w_j,\ w_i\right) + a\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j, w_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j, w_i\right) + \ldots$$

$$+ \left(f\,(u_m(t)), w_i\right) + \left(a(x)\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j\right), w_i\right) = 0; \quad \forall w_i \in V_m$$

$$\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)\left(w_j, w_i\right) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, a\left(w_j, w_i\right) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\left(w_j, w_i\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(f\,(u_m(t)), w_i\right) + \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\left(a(x) w_j, w_i\right) = 0; \ \forall w_i \in V_m$$

Hacemos variar j e i:

$$\begin{bmatrix} \left(w_1, w_1\right) & \cdots & \left(w_m, w_1\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(w_1, w_m\right) & \cdots & \left(w_m, w_m\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g''_{1m}(t) \\ \vdots \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(-\Delta w_1, w_1\right) & \cdots & \left(-\Delta w_m, w_1\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(-\Delta w_1, w_m\right) & \cdots & \left(-\Delta w_m, w_m\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(w_1, w_1\right) & \cdots & \left(w_m, w_1\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(w_1, w_m\right) & \cdots & \left(w_m, w_m\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(f(u_m(t)), w_i\right) \\ \vdots \\ \left(f(u_m(t)), w_i\right) \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix}(a(x)w_1,w_1) & \cdots & (a(x)w_m,w_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (a(x)w_1,w_m) & \cdots & (a(x)w_m,w_m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g'_{1m}(t)\\ \vdots\\ g'_{mm}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

Como la base es ortonormal en $L^2(\Omega)$, se sigue que

$$\begin{bmatrix}(w_1,w_1) & \cdots & (w_m,w_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (w_1,w_m) & \cdots & (w_m,w_m)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=I,$$

$$\begin{bmatrix}(-\Delta w_1,w_1) & \cdots & (-\Delta w_m,w_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (-\Delta w_1,w_m) & \cdots & (-\Delta w_m,w_m)\end{bmatrix}=A,$$

$$\begin{bmatrix}(a(x)\,w_1,w_1) & \cdots & (a(x)\,w_m,w_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (a(x)\,w_1,w_m) & \cdots & (a(x)\,w_m,w_m)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(x) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & a(x)\end{bmatrix}=a(x)\,I\,.$$

Ahora $\left(f(u_m(t)),w_i\right)_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega f\left(u_m(x,t)\right)w_i(x)\,dx$ depende de t, entonces

$$\begin{bmatrix}(f(u_m(t)),w_1)\\ \vdots\\ (f(u_m(t)),w_m)\end{bmatrix}=F(t)\ .$$

Sea $G(t)=\left[g_{1m}(t),\,g_{2m}(t),\,\dots,\,g_{mm}(t)\right]^T$.

Luego, se tiene:

$$G''(t)+A\,G(t)+G(t)+F(t)+a(x)\,G'(t)=0$$

$$G''(t)=-[A+I\,]G(t)-F(t)-a(x)\,G'(t)$$

hacemos $B=[A+I\,]$ y definimos

$$Y(t) = \begin{bmatrix} G(t) \\ G'(t) \end{bmatrix}, \quad \text{luego} \quad Y'(t) = \begin{bmatrix} G'(t) \\ G''(t) \end{bmatrix}.$$

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} G'(t) \\ -BG(t) - F(t) - a(x)G'(t) \end{bmatrix}$$

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B & -a(x)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(t) \\ G'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -F(t) \end{bmatrix} = LY(t) + H(t),$$

$$Y'(t) = \mathcal{F}\left(t, Y(t)\right),$$

$$Y' = \mathcal{F}\left(t, Y\right).$$

Por otro lado, tenemos que $u_{0m}, u_{1m} \in V_m$ tales que:

(i) $u_{0m} \to u_0$ fuerte en $H^1(\Omega)$, cuando $m \to \infty$ y

(ii) $u_{1m} \to u_1$ fuerte en $L^2(\Omega)$, cuando $m \to \infty$.

Sean

$$u_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{0j} w_j(x) \quad , \quad u_{1m}(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{1j} w_j(x).$$

De

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x), \text{ se tiene } u_m(x,0) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0) w_j(x)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{0j} w_j(x) = u_{0m}(x) = u_m(x,0) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0) w_j(x)$$

$\sum_{j=1}^{m} \left[\alpha_{0j} - g_{jm}(0)\right] w_j(x) = 0$ y como los w_j son linealmente Independientes, se obtiene que: $\alpha_{0j} = g_{jm}(0)$, $\forall\, j = 1, 2, \dots, m$.

Análogamente $\beta_{0j} = g''_{jm}(0)$, $\forall\, j = 1, 2, \dots, m$.

Denotemos con $G_0 = G(0) = \left[g_{1m}(0),\, g_{2m}(0),\, \ldots ,\, g_{mm}(0) \right]^T$ y

$$G_1 = G'(0) = \left[g'_{1m}(0),\, g'_{2m}(0),\, \ldots ,\, g'_{mm}(0) \right]^T$$

De allí que,

$$Y(0) = Y_0 = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1m}(0) \\ \vdots \\ g_{mm}(0) \\ g'_{1m}(0) \\ \vdots \\ g'_{mm}(0) \end{bmatrix}.$$

Luego, el (P.A.) es equivalente al P.V.I.

$$\left| \begin{array}{l} Y' = \mathcal{F}(t, Y) \\ Y(0) = Y_o \end{array} \right.$$

dónde $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$.

Mostremos que $\mathcal{F}(t, Y)$ cumple con las condiciones del Teorema de Caratheodory. Por la definición de G_0 , G_1 existe $b > 0$ tal que $\left| Y_o \right| \leq b$.

Sea $S = \left[0, \infty\right[\times M$, donde $M = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{2m} \,/\, \left| Y \right| \leq b \right\}$, $b > 0$ y $Y_o \in M$, probemos que:

(1) $\mathcal{F}(t, Y) = LY + H(t)$ es medible en t para cada Y fijo.

En efecto, para Y fijo, tenemos que L no depende de t (funciona como una constante), por lo tanto es medible. Además H es medible en t, para $t \in \left[0, t_m\right[$, porque los w_i son medibles y f es medible de H3 y H5.

(2) $\mathcal{F}(t, Y)$ es continua en Y para cada t fija.

En efecto, tendríamos que L es un operador lineal y $H(t)$ constante, por tanto $\mathcal{F}(t, Y)$ es continua.

(3) Para cada compacto K en S, existe una función real integrable $m_k(t)$, tal que

$\|\mathcal{F}(t,Y)\| \leq m_k(t), \ \forall (t,Y) \in K$

En efecto, $\|\mathcal{F}(t,Y)\| = \|LY + H(t)\| \leq \|L\| \|Y\| + \|H(t)\|$

$\|L\| \leq c$, para algún c constante positivo

$\|Y\| \leq b$, puesto que $Y \in M$.

$\|H(t)\|$ es integrable, ya que está compuesto por $(f(t), w_i)$, el cual es integrable.

Así, existe una función real integrable m(t), tal que:

$\|\mathcal{F}(t,Y)\| \leq cb + \|H(t)\| = m(t), \ \forall (t,Y) \in K$.

Luego, están satisfechas las condiciones del Teorema de Caratheodory y se sigue que para cada m, el problema aproximado posee solución local en el intervalo $[0, t_m[$, $t_m < T$.

Por lo tanto, $u_m(t)$ es solución del P.A. en el intervalo $[0, t_m[$, la cual se puede extender al intervalo [0, T].

ESTIMATIVAS

2.5 Estimativas a priori

Del problema aproximado para $w = w_i \in V_m$

$$\left(u''_m(t),\, w_i\right)+\left(-\Delta u_m(t),\, w_i\right)+\left(u_m(t),\, w_i\right)+\left(f\,(u_m(t)),\, w_i\right)+\left(a(x)\,u'_m(t),\, w_i\right)=0 \qquad (1)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ en } H^1(\Omega) \qquad (2)$$

$$u'_m(0) = u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ en } L^2(\Omega) \qquad (3)$$

Multiplicando por $g_{jm}(t)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ y sumando obtenemos

$$\left(u''_m(t),u'_m(t)\right) + a\left(u_m(t),u'_m(t)\right)+\left(u_m(t),u'_m(t)\right)+\left(f\left(u_m(t)\right),u'_m(t)\right)+\ldots$$

$$+\left(a(x)u'_m(t),u'_m(t)\right)=0 \qquad (4)$$

Afirmación

Se cumplen las siguientes identidades en el sentido de las distribuciones:

$$\left(u''_m(t),u'_m(t)\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2_{L^2} \quad , \quad a\left(u_m(t),u'_m(t)\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla u_m(t)\right|^2_{L^2} \qquad (5)$$

En efecto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2 = \left(u''_m(t),u'_m(t)\right) \text{ en } D'(0,\, t_m) \text{ esto es}$$

$$\left\langle \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u'_m(t),u'_m(t)\right),\, \varphi \right\rangle_{D'xD} = \left\langle \left(u''_m,u'_m(t)\right),\, \varphi \right\rangle_{D'xD} \quad , \quad \forall \varphi \in D(0,t_m)$$

Por definición

$$\left\langle \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u'_m(t),u'_m(t)\right),\, \varphi \right\rangle_{D'xD} = -\frac{1}{2}\left\langle \left(u'_m(t),u'_m(t)\right),\, \varphi' \right\rangle_{D'xD}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{t_m}\left(u''_m(t),u'_m(t)\right)\varphi'(t)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{t_m}\underbrace{|u'_m(t)|^2}_{p}\,\underbrace{\varphi'(t)dt}_{dq}$$

$$=-\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2\,\varphi(t)\Big|_0^{t_m}+\frac{1}{2}\,x\,2\int_0^{t_m}\left(u''_m(t),u'_m(t)\right)\varphi(t)dt$$

$$=-\frac{1}{2}|u'_m(t_m)|^2\,\varphi(t_m)+\frac{1}{2}|u'_m(0)|^2\,\varphi(0)+\int_0^{t_m}\left(u''_m(t),u'_m(t)\right)\varphi(t)\,dt$$

$$=\left\langle\left(u''_m(t),u'_m(t)\right),\varphi\right\rangle$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\,u'_m(t)\,|^2=\left(u''_m(t),u'_m(t)\right)\quad \text{en } D'(0,\,t_m)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\,\nabla u_m(t)\,\right|^2=\left(-\Delta u_m(t),u'_m(t)\right)\quad \text{en}\quad D'(0,\,t_m)\ \text{ esto es,}$$

$$\left\langle\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_m(t)|^2,\,\varphi\right\rangle_{D'xD}=\left\langle\left(-\Delta u_m(t),u'_m(t)\right),\,\varphi\right\rangle_{D'xD}\quad,\quad\forall\varphi\in D(0,t_m)$$

En efecto, de la definición de dualidad y derivada distribucional e integración por partes

$$\left\langle\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_m(t)|^2,\,\varphi'\right\rangle_{D'xD}=-\frac{1}{2}\int_0^{t_m}\underbrace{|\nabla u_m(t)|^2}_{p}\,\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dq}$$

$$=-\frac{1}{2}|\nabla u_m(t)|^2\,\varphi(t)\Big|_0^{t_m}+\frac{1}{2}\int_0^{t_m}\frac{d}{dt}\left(|\nabla u_m(t)|^2\right)\varphi(t)\,dt$$

Observe que por teorema de Green

$$\int_0^{t_m}\frac{d}{dt}\left(\nabla u_m(t),\nabla u_m(t)\right)\varphi(t)\,dt\quad=-2\int_0^{t_m}(\Delta u_m(t)\,u'_m(t))\varphi(t)dt\ +\int_\Gamma u_m(t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial\eta}\varphi(t)d\Gamma$$

$$= -2\int_0^{t_m} \left(\Delta u_m(t), u'_m(t) \right) \varphi(t)dt$$

$$\therefore \left\langle \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla u_m(t)\right|^2, \varphi \right\rangle_{D'\times D} = -\int_0^{t_m} \left(\Delta u_m(t), u'_m(t) \right) \varphi(t)dt$$

$$= -\left\langle \left(-\Delta u_m(t), u'_m(t) \right), \varphi \right\rangle_{D'\times D} \quad \forall \varphi \in D(0, t_m)$$

Tenemos también que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left| u_m(t) \right|_{L^2}^2 = \left(u_m(t), u'_m(t) \right) \quad \text{en } D'(0, t_m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\left(f\left(u_m(t)\right), u'_m(t) \right) = \int_\Omega f\left(u(x,t)\right) u(x,t) dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\left(a(x) u'_m(t), u'_m(t) \right) = \left| \sqrt{a} u'_m(t) \right|_{L^2}^2 \quad \text{pues } a(x) \geq a_0 > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

De (5) a (8) en (4), obtendremos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla u_m(t)\right|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left| u_m(t)\right|_{L^2}^2 +$$

$$+ \int_\Omega f\left(u(x,t)\right) u'(x,t) dx + \left|\sqrt{a} u'_m(t)\right|_{L^2}^2 = 0$$

Definamos $F(s) := \int_0^s f(t)dt$ el cual está bien definida por (H3) tenemos que $F'(s) = f(s)$, luego

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla u_m(t)\right|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|_{L^2}^2 + \int_\Omega \frac{dF\left(u(x,t)\right)}{dt} dx + \left|\sqrt{a} u'_m(t)\right|_{L^2}^2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left|u'_m(t)\right|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla u_m(t)\right|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left|u_m(t)\right|_{L^2}^2 + \int_\Omega F\left(u_m(x,t)\right) dx \right] + \left|\sqrt{a} u'_m(t)\right|_{L^2}^2 = 0 \quad (9)$$

Observación:

Se define,

$$E_m(t) = \frac{1}{2}|u'_m(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\nabla u_m(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|u_m(t)|_{L^2}^2 + \int_\Omega F(u_m(x,t))dx$$

donde $\int_\Omega F(s)ds > 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$

$E_m(t)$ es la energía asociada al problema aproximado, donde

$$\frac{d}{dt}E_m(t) \le -\left|\sqrt{a(x)}u'_m(t)\right|$$

esto es, la energía es decreciente

De (4) integrando de 0 a $t \le T$, tenemos

$$\frac{1}{2}|u'_m(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\nabla u_m(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|u_m(t)|_{L^2}^2 + \int_\Omega F(u_m(t))dx + \int_0^t \left|\sqrt{a}u'_m(t)\right|_{L^2}^2 dt$$

$$= \frac{1}{2}|u'_m(0)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\nabla u_m(0)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|u_m(0)|_{L^2}^2 + \int_\Omega F(u_m(0))dx$$

$$= \frac{1}{2}|u_{1m}|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\nabla u_{0m}|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|u_{0m}|_{L^2}^2 + \int_\Omega F(u_{0m})dx$$

De H3: $f(s)s \ge (2+\delta)F(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, entonces

$$F(s) \le \frac{f(s)s}{(2+\delta)} \quad \text{para luego} \quad |F(s)| \le \frac{f(s)s}{(2+\delta)} = C \quad \text{cte}, \ \forall s \in \mathbb{R}$$

Por tanto en expresión precedente

$$\le \frac{1}{2}|u_{1m}|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\nabla u_{0m}|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|u_{0m}|_{L^2}^2 + C\int_\Omega dx$$

$$\le \frac{1}{2}|u_1|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\nabla u_0|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|u_0|_{L^2}^2 + C\,\mathrm{med}(\Omega)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left| u_1 \right|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\| u_0 \right\|_{H^1}^2 + \frac{C}{2}\left\| u_0 \right\|_{H^1}^2 + C\,\mathrm{med}(\Omega) = K$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2}\left| u'_m(t) \right|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left| \nabla u_m(t) \right|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left| u_m(t) \right|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} F\left(u_m(t)\right)dx + \int_0^t \left| \sqrt{a}\,u'_m(t) \right|_{L^2}^2 dt \leq K \qquad (10)$$

De (10), tomando $\sup\limits_{t\in]0,T[}$ a cada término por separado tendremos

$\left(u'_m\right)$ es una sucesión limitada en $L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$.

$\left(u_m\right)$ es una sucesión limitada en $L^{\infty}\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$

$\left(u_m\right)$ es una sucesión limitada en $L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

Por tanto, existen subsucesiones denotadas de la misma manera tal que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{débil estrella en } \left(L^{\infty}\left(0,T;H^1(\Omega)\right)\right)' \qquad (11)$$

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} x \quad \text{débil estrella en } L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right) = \left(L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right)' \qquad (12)$$

De (11) resulta que

$$\int_0^t \left\langle u_m(t), w(t) \right\rangle dt \;\to\; \int_0^t \left\langle u(t), w(t) \right\rangle dt \quad \forall w \in \left(L^{\infty}\left(0,T;H^1(\Omega)\right)\right)'$$

Y en particular para $w \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, luego

$u_m \rightharpoonup u$ débil en $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ y por tanto en $D'\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, de donde se tiene

$u'_m \rightharpoonup u'$ débil en $D'\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ y por otro lado de (12)

$u'_m \rightharpoonup x$ débil en $D'\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ de donde por la unicidad de la convergencia, se tiene que $x = u'$.

Ahora bien, de (11) se tiene

$$\int_0^T ((u_m(t), w))dt \to \int_0^T ((u(t), w))dt \quad \forall w \in \left(L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right)\right)'$$

Tomando $w = \theta v$, $\theta \in L^1(0,T)$, $v \in H^1(\Omega)$ tenemos

$$\int_0^T ((u_m(t), v))\theta dt \to \int_0^T ((u(t), v))\theta dt$$

Luego

$$a(u_m(t), v) \to a(u(t), v)$$

en el sentido de $L^1(0,T)$ y por tanto en $D'(0,T)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$ (13)

De (12) y (13) resulta

$$\int_0^T (u'_m(t), w(t))dt \to \int_0^T (u'(t), w(t))dt \quad \forall w \in L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

Tomando $w = \theta v$, $\theta \in L^1(0,T)$, $v \in L^2(\Omega)$ tenemos

$$\int_0^T (u'_m(t), v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'(t), v)\theta(t)dt \quad \forall v \in L^2(\Omega), \forall \theta \in L^1(0,T)$$

Tomando $\theta \in D(0,T)$ y recordando que $t \mapsto (u'(t), v)$ es una distribución de $L^2(0,T)$, se tiene

$$\frac{d}{dt}(u'_m(t), v) \to \frac{d}{dt}(u'(t), v) \quad \forall v \in L^2(\Omega), \text{en } D'(0,T) \tag{14}$$

Y en particular $\forall v \in H^1(\Omega)$.

De (11) y la dualidad se tiene

$$\int_0^T \langle u_m(t), w(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle u(t), w(t)\rangle dt \quad \forall w \in \left(L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right)\right)'$$

En particular para $w \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$.

Tomando $w=\theta v$, $\theta\in L^2(0,T)$, $v\in H^1(\Omega)$ tenemos

$$\int_0^T \langle u_m(t),v\rangle\theta dt \;\to\; \int_0^T \langle u(t),v\rangle\theta dt \;,\quad \theta\in D(0,T)$$

$\langle u_m(t),v\rangle \to \langle u(t),v\rangle$ en el sentido de $D'(0,T)$, $\forall v\in H^1(\Omega)$ (15)

Con los resultados precedentes se tiene el espacio siguiente

$$W(0,T)=\left\{u\,;\,u\in L^1\left(0,T;H^1(\Omega)\right),\,u\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right\}$$

Con $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$, $B=B_1=L^2(\Omega)$, $p_0=2=p_1$, por el teorema de Lions - Aubin se tiene

$$W(0,T)\hookrightarrow L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

Por tanto, existe una subsucesión, aun denotada de la misma forma (u_m), tal que

$$u_m \to u \text{ , fuerte en } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \qquad (16)$$

Desde que $f\in C^1(\Omega)$ y $f'\in L^\infty(\Omega)$, por el teorema del valor medio se tiene

$$f(s_1)-f(s_2)=f'(\tau)(s_1-s_2)$$

Donde $\tau=\theta s_1+(1-\theta)s_2$, $0\le\theta\le 1$.

Sea $\varphi\in D(0,T)$, $w(t)\in L^2(\Omega)$ entonces,

$$\int_0^T (f(u_m),w)\varphi dt-\int_0^T (f(u),w)\varphi dt=\int_0^T\left[(f(u_m),w)-(f(u),w)\right]\varphi dt$$

$$=\int_0^T \left((f(u_m)-f(u),w)\right)\varphi dt$$

$$\le\int_0^T |f(u_m)-f(u)||w||\varphi|dt$$

$$=\int_0^T |f'(\tau)||u_m-u||w||\varphi|dt$$

A partir de H4 se tendría, que

$$\frac{\left|f(x)-f(y)\right|}{\left|x-y\right|} \leq C\left(1+\left|x\right|^{p-1}+\left|y\right|^{p-1}\right)$$

Tomando limite nos resulta

$$\left|f'(x)\right| \leq C\left(1+\left|x\right|^{p-1}\right)$$

Volviendo al desarrollo, por teorema de Sobolev

$$\leq \int_0^T \int_\Omega \left(1+\left|u\right|^{p-1}\right)\left|w\right| dt$$

$$\leq \int_0^T \left(C+\left|\nabla u\right|^{p-1}\right)\left|u_m-u\right|\left|\varphi\right| dt$$

$$\leq C\int_0^T \left|u_m-u\right|\left|\varphi\right| dt$$

$$\leq C\left(\int_0^T \left|u_m-u\right|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \left|\varphi\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\int_0^T \left(f(u_m),w\right)\varphi dt-\int_0^T \left(f(u),w\right)\varphi dt \leq C\left|u_m-u\right|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}\left|\varphi\right|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}$$

Luego, de (17) se tiene para un caso particular $w(t)=v\in H^1(\Omega)$

$$\int_0^T \left(f(u_m),v\right)\varphi dt \;\rightarrow\; \int_0^T \left(f(u),v\right)\varphi dt$$

Esto es

$$\left(f(u_m),v\right) \rightarrow \left(f(u),v\right) \text{ en el sentido de } D'(0,T),\ \forall v\in H^1(\Omega) \qquad (17)$$

De (16) y Ω regular se tiene $u_m \rightarrow u$, fuerte en $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)=L^2(Q)$, entonces pasando a una subsucesión si es necesario, podemos suponer $u_m \rightarrow u$ c.s. en Q, y por tanto

$$a(x)u_m \rightarrow a(x)u \quad \text{c.s. en } Q$$

Desde que (u_m) es limitada en $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, entonces $\left(a(x)u_m\right)$ es limitada en $L^2(Q)$.

En efecto,

$$\int_Q \left|a(x)u_m(x,t)\right|^2 dxdt \le |a|_\infty^2 \int_Q \left|u_m(x,t)\right|^2 dxdt \le |a|_\infty^2 K$$

Luego

$a(x)u_m \rightharpoonup a(x)u$ débil en $L^2(\Omega)=\left(L^2(\Omega)\right)'$

$$\int_Q a(x)u_m w dxdt \;\to\; \int_Q a(x)uwdxdt \quad \forall w\in L^2(Q)=L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

En particular,

$$\int_0^T\left(\int_\Omega a(x)u_m(t)vdx\right)\varphi' dt \;\to\; \int_0^T\left(\int_\Omega a(x)u(t)vdx\right)\varphi' dt \qquad \varphi'\in D(0,T),\, v\in H^1(\Omega)$$

Por la derivada en el sentido distribucional

$$\int_0^T\left(\int_\Omega a(x)u'_m(t)vdx\right)\varphi dt \;\to\; \int_0^T\left(\int_\Omega a(x)u'(t)vdx\right)\varphi dt$$

$$\int_0^T\left(a(x)u'_m(t),v\right)\varphi dt \;\to\; \int_0^T\left(a(x)u'(t),v\right)\varphi dt$$

De donde

$$\left(a(x)u'_m(t),v\right) \;\to\; \left(a(x)u'(t),v\right) \text{ en } D'(0,T),\; \forall v\in H^1(\Omega) \qquad (18)$$

2.6 Pasaje a límite:

De (14) – (18) en (P.A.) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(u'(t),v\right)+a\left(u'(t),v\right)+\left(u,v\right)+\left(f\left(u\right),v\right)+\left(a\left(x\right)u',v\right)=0,\ \forall v\in H^1\left(\Omega\right)\ \text{ en }\ D'(0,T)$$

Esto es,

$$u_{tt}-\Delta u+u+f\left(u\right)+a\left(x\right)u_t=0\ \text{ en }\ D'\left(0,T;H^1\left(\Omega\right)\right)$$

Afirmación: $u''\in L^2\left(0,T;\left(H^1\left(\Omega\right)\right)'\right)$.

Identificando $L^2\left(\Omega\right)$ con su dual ($L^2\left(\Omega\right)\cong\left(L^2\left(\Omega\right)\right)'$) tenemos

$$H^1\left(\Omega\right)\hookrightarrow L^2\left(\Omega\right)\cong\left(L^2\left(\Omega\right)\right)'\hookrightarrow\left(H^1\left(\Omega\right)\right)'$$

Y como $u'\in L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)\hookrightarrow L^2\left(0,T;\left(H^1\left(\Omega\right)\right)'\right)$

Resulta que u' define una distribución vectorial con valores en $\left(H^1\left(\Omega\right)\right)'$ y cuya derivada es

$$\left\langle\left(u'\right)',\varphi\right\rangle=-\int_0^T\left(u'(t),v\right)\varphi'(t)dt \qquad (19)$$

$$=\left\langle\frac{d}{dt}\left(u'(t),v\right),\varphi\right\rangle$$

Como $u\in L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Omega\right)\right)\hookrightarrow L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega\right)\right)$, entonces $-\Delta u\in L^2\left(0,T;\left(H^1\left(\Omega\right)\right)'\right)$.

El p-seudo laplaciano

$A:W^{1,p}\left(\Omega\right)\to W^{-1,p}\left(\Omega\right)$, definida por $Au=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$

Si p = 2, $Au=-\Delta u$, tendremos

$$\left\langle\left\langle-\Delta u,\varphi\right\rangle,v\right\rangle=\int_0^T\left(-\Delta u,v\right)\varphi dt,\quad\forall\varphi\in D\left(0,T\right),\ \forall v\in H^1\left(\Omega\right) \qquad (20)$$

$u \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2\left(0,T;\left(H^1(\Omega)\right)'\right)$, de donde resulta que u también define una distribución vectorial con valores en $\left(H^1(\Omega)\right)'$.

$$\langle\langle u,\varphi\rangle, v\rangle = \int_0^T (u,v)\varphi dt, \quad \forall v \in H^1(\Omega),\ \forall \varphi \in D(0,T) \tag{21}$$

$f \in C^1(\Omega)$, $u \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2\left(0,T;\left(H^1(\Omega)\right)'\right)$, entonces

$$f(u) \in L^2\left(0,T;\left(H^1(\Omega)\right)'\right)$$

$$\langle\langle f(u),\varphi\rangle, v\rangle = \int_0^T (f(u),v)\varphi dt \tag{22}$$

Finalmente se tiene $a(x) \in L^\infty(\Omega)$, $\quad u' \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2\left(0,T;\left(H^1(\Omega)\right)'\right)$

Entonces $a(x)u'$ define una distribución vectorial

$$\langle\langle a(x)u',\varphi\rangle, v\rangle = \int_0^T (a(x)u',v)\varphi dt \tag{23}$$

Sumando de (19) a (23) y sabiendo que u es solución débil de (2,1) se tiene

$$\langle\langle (u')',\varphi\rangle, v\rangle + \langle\langle -\Delta u,\varphi\rangle, v\rangle + \langle\langle u,\varphi\rangle, v\rangle + \langle\langle f(u),\varphi\rangle, v\rangle + \langle\langle a(x)u',\varphi\rangle, v\rangle =$$

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u'(t),v),\varphi\right\rangle + \int_0^T (-\Delta u,v)\varphi dt + \int_0^T (u,v)\varphi dt + \int_0^T (f(u),v)\varphi dt + \int_0^T (a(x)u',v)\varphi dt$$

$\forall \varphi \in D(0,T), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

$$\langle\langle u'' - \Delta u + u + f(u) + a(x)u',\varphi\rangle, v\rangle =$$

$$= \int_0^T \left[\frac{d}{dt}(u'(t),v) + (-\Delta u,v) + (u,v) + (f(u),v) + (a(x)u',v)\right]\varphi dt = 0$$

$\forall \varphi \in D(0,T), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

$$\therefore \quad u'' = \Delta u - u - f(u) - a(x)u' \in L^2\left(0,T;\left(H^1(\Omega)\right)'\right)$$

Podemos observar de los resultados obtenidos que

$$u \in C^{o}\left([0,T];L^{2}(\Omega)\right) \text{ y } u' \in C^{o}\left([0,T];\left(H^{1}(\Omega)\right)'\right)$$

De modo que hace sentido $u(0)$ y $u'(0)$.

2.7 Verificación de los Condiciones Iniciales

De las convergencias obtenidas, resultan

$$\int_{0}^{T}\left(u_{m}(t),w_{j}\right)\varphi(t)dt \;\to\; \int_{0}^{T}\left(u(t),w_{j}\right)\varphi(t)dt,\;\; \forall\varphi \in L^{1}(0,T) \text{ y}$$

$$\int_{0}^{T}\left(u_{m}(t),w_{j}\right)\theta(t)dt \;\to\; \int_{0}^{T}\left(u(t),w_{j}\right)\theta(t)dt,\;\; \forall\theta \in L^{1}(0,T)$$

Cuando

$\theta \in C^{1}([0,T])$ con $\theta(0)=1$, $\theta(T)=0$ y $\varphi=\theta'$

Resulta sumando las dos convergencias anteriores

$$\int_{0}^{T}\left(u_{m}(t),w_{j}\right)\varphi dt+\int_{0}^{T}\left(u_{m}(t),w_{j}\right)\theta dt \to \int_{0}^{T}\left(u(t),w_{j}\right)\varphi dt+\int_{0}^{T}\left(u(t),w_{j}\right)\theta dt \qquad (24)$$

$$\int_{0}^{T}\left(u'_{m}(t),w_{j}\right)\theta(t)dt=\int_{0}^{T}\frac{d}{dt}\left(u_{m}(t),w_{j}\right)\theta(t)dt$$

$$=\left(u_{m}(t),w_{j}\right)\theta(t)\Big]_{0}^{T}-\int_{0}^{T}\left(u_{m}(t),w_{j}\right)\theta'(t)dt$$

$$=\left(u_m(T),w_j\right)\theta(T)-\left(u_m(0),w_j\right)\theta(0)-\int_0^T\left(u_m(t),w_j\right)\varphi(t)dt$$

$$=-\left(u_m(0),w_j\right)-\int_0^T\left(u_m(t),w_j\right)\varphi(t)dt$$

Análogamente

$$\int_0^T\left(u'(t),w_j\right)\theta(t)dt=-\left(u(0),w_j\right)-\int_0^T\left(u(t),w_j\right)\varphi(t)dt$$

Luego, en (24):

$$\int_0^T\left(u_m(t),w_j\right)\varphi dt-\left(u_m(0),w_j\right)-\int_0^T\left(u_m(t),w_j\right)\varphi(t)dt \quad\rightarrow$$

$$\int_0^T\left(u(t),w_j\right)\varphi dt-\left(u(0),w_j\right)-\int_0^T\left(u(t),w_j\right)\varphi(t)dt$$

entonces

$$-\left(u_m(0),w_j\right)\rightarrow-\left(u(0),w_j\right),\quad \forall w_j\in V_m \tag{25}$$

Como $u_m(0)\rightarrow u_0$ fuerte en $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ y por tanto débil en $L^2(\Omega)$, esto es

$$\left(u_m(0),w_j\right)\rightarrow\left(u_0,w_j\right),\quad \forall j=1,...,m \tag{26}$$

De (25) y (26) y unicidad de la convergencia

$$\left(u_m(0),w_j\right)=\left(u_0,w_j\right),\quad \forall j=1,...,m$$

Por la densidad de las combinaciones finitas de elementos de V_m en $H^1(\Omega)$

$$\therefore\ u(0)=u_0\quad \text{en}\ \Omega$$

CAPÍTULO III

Unicidad de la Solución Débil.

En la prueba de la unicidad de la solución local utilizaremos el método estándar de la energía.

Sean u y v dos soluciones del problema (2,1), entonces

$$u, v \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right),\ u', v' \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),\ u'', v'' \in L^2\left(0,T;\left(H^1(\Omega)\right)'\right)$$

Además se verifica, $\forall w \in H^1(\Omega)$

$$\left(u''(t),w\right)+a\left(u(t),w\right)+\left(u(t),w\right)+\left(f\left(u(t)\right),w\right)+\left(a(x)u'(t),w\right)=0$$

$$\left(v''(t),w\right)+a\left(v(t),w\right)+\left(v(t),w\right)+\left(f\left(v(t)\right),w\right)+\left(a(x)v'(t),w\right)=0$$

Con $u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1,\ v(0)=u_0,\ v'(0)=u_1$

Restando las dos ecuaciones obtenemos

$$\left((u''-v'')(t),w\right)+a\left((u-v)(t),w\right)+\left((u-v)(t),w\right)+\left(f\left(u(t)\right)-f\left(v(t)\right),w\right)+$$
$$+\left(a(x)(u-v)'(t),w\right)=0$$

Con $(u-v)(0)=0,\ (u-v)'(0)=0$

Definamos $\omega = u - v$ y hacemos $w=\omega'$ en la ecuación precedente

$$\left(\omega''(t),\omega'(t)\right)+a\left(\omega(t),\omega'(t)\right)+\left(\omega(t),\omega'(t)\right)+\left(f\left(u(t)\right)-f\left(v(t)\right),\omega'(t)\right)+$$
$$+\left(a(x)\omega'(t),\omega'(t)\right)=0$$

Con $\omega(0)=0,\ \omega'(0)=0$

entonces,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\omega'(t)\right|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\omega\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\omega(t)\right|_{L^2}^2+\left(f\left(u(t)\right)-f\left(v(t)\right),\omega'(t)\right)+$$

$$+\left(a(x)\omega'(t),\omega'(t)\right)=0$$

Sumando y restando en el cuarto término $f(\omega)$ y operando

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|\omega'|^2+\|\omega\|^2+|\omega|^2+2\int_\Omega F(\omega)\,dx\right]=\left(f\left(v(t)\right)-f\left(u(t)\right),\omega'(t)\right)+\left(f\left(\omega(t)\right),\omega'\right)$$

$$-\left(a(x)\omega'(t),\omega'(t)\right)$$

$$\leq\left|f\left(v(t)\right)-f\left(u(t)\right)\right|\left|\omega'(t)\right|+\left|f\left(\omega(t)\right)\right|\left|\omega'(t)\right|+|a|_\infty\left|\omega'(t)\right|^2$$

Como $f\in C^1\cap C^\infty$ y propiedad $\left|f(s)\right|\leq C|s|$, $\forall s\in\mathbb{R}$ se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|\omega'|^2+\|\omega\|^2+|\omega|^2+2\int_\Omega F(\omega)\,dx\right]\leq 2f'(\tau)\left|u(t)-v(t)\right|\left|\omega'(t)\right|+2C\left|\omega(t)\right|\left|\omega'(t)\right|$$

$$+2|a|_\infty\left|\omega'(t)\right|^2$$

$$\leq\left|\omega(t)\right|^2+|f'|_\infty^2\left|\omega'(t)\right|^2+\left|\omega(t)\right|^2+C\left|\omega'(t)\right|^2+2|a|_\infty\left|\omega'(t)\right|^2$$

$$=2\left|\omega(t)\right|^2+\left(|f'|_\infty^2+C+2|a|_\infty\right)\left|\omega'(t)\right|^2$$

Integrando de o a $t\leq T$

$$|\omega'|^2+\|\omega\|^2+|\omega|^2+2\int_\Omega F(\omega)\,dx\leq\left|\omega'(0)\right|^2+\left\|\omega(0)\right\|^2+\left|\omega(0)\right|^2+2\int_\Omega F\left(\omega(x)\right)dx$$

$$+2\int_0^t\left|\omega(s)\right|^2ds+K\int_0^t\left|\omega'(s)\right|^2ds$$

$$\leq K\int_0^t\left[\left|\omega(s)\right|^2+\left|\omega'(s)\right|^2\right]ds$$

Donde $K=|f'|_\infty^2+C^2+2|a|_\infty$, $K=\max\{2,K\}$, entonces,

$$\left|\omega(t)\right|^2+\left|\omega'(t)\right|^2\leq K\int_0^t\left[\left|\omega(s)\right|^2+\left|\omega'(s)\right|^2\right]ds$$

Por el Lema de Gronwall

$$\left|\omega(t)\right|^2+\left|\omega'(t)\right|^2=0,\quad\forall t\in[0,T]$$

De donde

$$\therefore\ u(t)=v(t),\quad\forall t\in[0,T]$$

CAPÍTULO IV

Comportamiento Asintótico.-

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Se tiene $u_0 \in H^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$.

El problema (2.1) con $a(x) \geq a_0 > 0$ c. s. en ω, $\omega \subseteq \Omega$ vecindad de $\Gamma = \partial\Omega$.

Se define la energía del sistema (2.1) como

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \left| u_t(x,t) \right|^2 + \left| \nabla u(x,t) \right|^2 + \left| u(x,t) \right|^2 \right\} dx + \int_{\Omega} F(u(x,t)) dx$$

El objetivo es obtener el decaimiento uniforme exponencial de la energía para soluciones del problema (2.1) es decir

$$\exists C, \gamma > 0 \text{ tal que } E(t) \leq Ce^{-\gamma t}, \ \forall\, t \in (0, +\infty)$$

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto regular de clase C^2, consideremos la ecuación de onda no homogénea

$$(4.1) \left| \begin{array}{lll} \theta'' - \Delta\theta = f & \text{en} & Q = \Omega \times [0,T] \\ \theta(0) = \theta^0 , \quad \theta'(0) = \theta^1 & \text{en} & \Omega \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = 0 & \text{sobre} & \Sigma = \Gamma \times [0,T] \end{array} \right.$$

Lema 4.2

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^2, q = (q_k)_{k \geq 1}$ un campo vectorial de clase $\left[C^1(\Omega)\right]^n$.

Entonces para cada solución débil $\theta = \theta(x,t)$ del sistema (4.1) se tiene

$$\forall \left(\theta^0, \theta^1\right) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad f \in L^2\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$$

tal que

$$\int_{\Omega}(\theta''-\Delta\theta)q.\nabla\theta=-\frac{1}{2}\int_{\Sigma}q.v|\theta'|^2+\left(\int_{\Omega}\theta' q.\nabla\theta\right]_0^T+\frac{1}{2}\int_{Q}\operatorname{div}.(q)\left[|\theta'|^2-|\nabla\theta|^2\right]+\int_{Q}\frac{\partial(q_k)}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}$$

Demostración:

Usando la técnica de multiplicadores, multiplicando (4.1) por $q_k\dfrac{\partial\theta}{\partial x_k}$, donde θ es la solución débil del sistema (4.1) se obtiene el resultado.

Lema 4.3

Para u solución de (4.1) y con las hipótesis dadas en H1 y H2 se tiene

$$\frac{1}{2}\int_{Q}\operatorname{div}.(q)\left[|\theta'|^2-|\nabla\theta|^2-2|u|^2-2F(u)\right]+\int_{Q}q.\nabla u\left[a(x)u_t-u\right]+\int_{Q}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}(q_k)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{Q}q.v\left[|\theta_t|^2-2|u|^2-2F(u)\right]-\left(\int_{\Omega}u_t q.\nabla u\right]_0^T$$

Demostración:

Usando la técnica de multiplicadores, multiplicando a (2.1) por $q.\nabla u$.

Lema 4.4

Con las hipótesis dadas en H1 - H4 se tiene

$$\left(\int_{\Omega}m.\nabla u_t+a(x)u\right]_0^T+\frac{n}{2}\int_{Q}|u_t|^2+\left(1-\frac{n}{2}\right)\int_{Q}|\nabla u|^2-n+\int_{Q}|u|^2+n\int_{Q}F(u)+$$

$$-\int_{Q}a(x)u.m.\nabla u_t-\int_{Q}u.m.\nabla u\leq\int_{Q}m.v.\left[|u_t|^2-|u|^2+F(u)\right]$$

Demostración:

Se deduce del lema 4.3

Lema 4.5

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ regular y u solución débil de (2.1) se tiene

$$\left(\int_{\Omega} u.\left(u_t + \frac{a(x)u}{2} \right) \right]_0^T = \int_{Q} \left[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 \right] - \int_{Q} \left[uF(u) + |u|^2 \right]$$

Demostración:

Multiplicando por ξu al sistema (2.1) con $\xi \in W^{1,\infty}(\Omega)$ y luego se toma $\xi = 1$, deducimos el lema 4.5

Lema 4.6

Con las hipótesis de H1 – H5, se tiene que $\exists\, C > 0$ tal que

$$C\int_{0}^{T} E(t) \leq \int_{\Sigma_0} m.v\left\| \left[|u_t|^2 + |u|^2 + F(x) \right] \right\| + |x| + \int_{Q} |a(x)u.m.\nabla u_t|$$

donde

$$x = \left(\int_{\Omega} \left\{ m.\nabla u\left[u_t + a(x)u \right] + \alpha u\left(u_t + \frac{a(x)u}{2} \right) \right\} \right]_0^T, \quad \alpha > 0$$

Demostración:

Combinando los lemas (4.4) y (4.5) se obtiene el resultado deseado.

Lema 4.7

Con las hipótesis de H1 – H4, se obtiene

$$\left(\int_{\Omega} u.\left(u_t + \frac{a(x)u}{2} \right) \right]_0^T = \int_{Q} \left[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 \right] - \int_{Q} |u| - \int_{Q} uf(u)$$

Demostración:

Multiplicando por $\xi(x)u\,a(x)$ al sistema (2.1) e integrarlo de 0 a T obtenemos el lema 4.7.

Proposición 1.-

Con la hipótesis de H1 – H5 se obtiene,

$$T\,E(T) \le C_1 \left\{ \int_Q a(x)|u_t|^2 + \int_Q |u|^2 + \left| \left[\left(\int_Q u_t\, h\nabla u \right) \right]_0^T \right| + |x| + |y| \right\}$$

con $y = \left[\left(\int_Q \eta \left(u_t + \frac{a(x)u}{2} \right) \right) \right]_0^T$

Demostración:

Resulta de los lemas (4.7) y (4,6) y además desde que la energía es decreciente, obtenemos

$$T\,E(T) \le \int_0^T E(t)dt$$

Lema 4.8

Con las hipótesis de H1 – H4, se tiene

$$|x| + |y| + \left| \left[\left(\int_\Omega u_t\, h\nabla u \right) \right]_0^T \right| \le C_2 \left(2E(T) + \int_\Omega a(x)|u_t|^2 \right)$$

Proposición 2.-

Con la hipótesis de H1 – H5 obtenemos

$$E(T) \le C \left(\int_Q a(x)|u_t|^2 + \int_Q |u|^2 \right), \quad C > 0$$

Demostración:

Resulta del lema (4.8) en la proposición 1.

Proposición 3.-

Con la hipótesis de H1 – H4 obtenemos

$$\int_Q |u|^2 \le C \int_Q a(x)|u_t|^2 , \quad C > 0$$

Demostración:

Su demostración es por el absurdo, usando el principio de la continuación única (ver Ruiz), construyendo un sistema estacionario cuya solución lleva a una contradicción.

TEOREMA FUNDAMENTAL

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, limitado con frontera de clase C^2, y se satisfacen las condiciones H1 – H5. Entonces, existen constantes $C, \gamma > 0$ tal que,

$$E(t) \leq CE(0)\, e^{-\gamma t}. \quad \forall t \geq 0$$

Y para toda solución débil de (2.1).

Demostración:

De la proposición 3 en proposición 2 se tiene que, $\exists\, C_0 > 0$ tal que

(1) $$E(t) \leq C_0 \int_0^T \int_\Omega a(x)|u_t|^2 dxdt$$

Desde que,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_\Omega a(x)|u_t|^2\, dx$$

Integrando de 0 a T.

(2) $$E(T) - E(0) = -\int_0^T \int_\Omega a(x)|u_t|^2\, dxdt$$

Combinando (4,1) y (4,2) se obtiene

$$E(T) \leq \frac{C_0}{1+C_0} E(0), \quad \text{hacemos } C = \frac{C_0}{1+C_0} < 1, \quad T > 0$$

Luego, por la propiedad de semigrupo y como el problema $(2,1)$ está bien puesto, obtenemos

$$E(t) \leq KE(0)\, e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0$$

Para toda solución débil de (2.1), donde

$$C = \frac{C_0}{1+C_0}, \quad \gamma = \frac{1}{T}\log C, \quad \text{luego} \;\; K = \frac{C_0}{1+C_0}$$

COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Existen otros métodos para el estudio del decaimiento de energía de una ecuación de onda, con condiciones iníciales y de frontera. Aquí se aborda el sistema (2.1) tomando los resultados obtenidos por Ruiz [18], el principio de Continuación única usando el método indirecto (reducción por el absurdo), técnicas de los multiplicadores y técnicas de las desigualdades integrales, esto último desarrollado por Perez Salvatierra – Yauri Luque [16].

El método para obtener el decaimiento exponencial del sistema (2.1), usando el principio de Continuación única, también puede adaptarse a otros sistemas, esto puede ser variando las datos de frontera. Además es posible aplicar este método a otros modelos como son: Von Karman con condiciones de disipación en la frontera, placas con condiciones mixtas en la frontera de tipo Dirichlet – Newmann, etc., que podrían ser materias de estudio.

El método usado es una de las múltiples maneras de poder obtener el decaimiento de la energía de ciertos sistemas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Adams, R. A. Sobolev Spaces. Academic Press. New York, 1975.

[2] Brezis, H. Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones. Paris, 1983.

[3] Pedro H. Rivera Rodrigues. Métodos de Espacios de Hilbert en Ecuaciones Diferenciales Parciales. Escuela Latinoamericana de Matemática - 1973

[4] Coddington, E. A. – Levinson, N. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw – Hill. New York, 1955.

[5] Duchateau, P. Zachmann, D. Theory and Problems of Partial Differential Equations. Editorial Shaum. McGraw-Hill. EUA, 1986.

[6] Erwin Kreyszig. Introductory Funtional Analysis with Applications. University of Windsor. U S A – 1978.

[7] L. A. Medeiros – P. H. Rivera. Espaços de Sobolev. Equaçoes Diferenciais Parciais. Instituto de Matematica. Universidade Federal do Rio de Janeiro 1975.

[8] Kolmogorov, A. N. – Fomin, S. V. Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Editorial Mir. Moscú, 1978.

[9] Lions, J. L. Quelques Méthodes de Résolution des aux Limites non Linéaires. D unod. Paris, 1969.

[10] Teman. R. , Navier - Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North Holland (1979).

[11] Moreira Cavalcanti, M. – Domingos Cavalcanti, V. N. Iniciaçao á Teoria das Distribuiçoes e aos Espaços de Sobolev. 2007.

[12] Medeiros, L. A. – Milla Miranda, M. Iniciaçao aos Espaços de Sobolev e ás Equaçoes Diferenciais Parciais. Instituto de Matemática – UFRJ. Río de Janeiro, 1989.

[13] Jaime E Muñoz Rivera. Hidden Regularity for a strongly nonlinear Wave equation. Pesquimat Vol I, Nº 1. UNMSM. Lima Julio 1998.

[14] Jaime E Muñoz Rivera with Reinhard Racke. Exponential Stability for wave equations with non-dissipative damping. Nonlinear Analysis, Vol 68, Nº 1, UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, Febrero 2007.

[15] Ricardo Fuentes Apolaya, Manuel Milla Miranda. Global Solutions and Decay of Nonlinear wave equation with thermo-elastic coupling . Universidad Federal Fluminense, Universidade Estadual de Paraiba, Brasil 2011.

[16] Alfonso Pérez Salvatierra – Victoriano Yauri – Andrés Guardia: Estabilización de la frontera de un sistema hiperbólico. Pesquimat, vol. VII – Nº2, 2004. Lima – Perú.

[17] S. Kesavan, Topics in Functional Analysis and Applications. Wiley Eastern Limited. New Delhi, India, 1989.

[18] A. Ruiz, Unique continuation for weak solution of the wave equation plus a potencial Journal Math pure Applicada 71, 1992 pag. 455 . 467.